

LE RAYON D'INJECTIVITÉ DES SURFACES À COURBURE MAJOREE

C. BAVARD

1. Introduction

1-1. Le résultat de cet article est le théorème: *si V est une surface riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle $K = K(V) \leq 1$, complète (resp.: à bord avec $\text{Max}_{\xi \in V} \text{dist}(\xi, \partial V) \geq \pi$), il existe un point p de V où le rayon d'injectivité $\text{Ray Inj}_p(V)$ est supérieur ou égal à π . Le cas de la sphère euclidienne montre que la borne π est optimale.*

1-2. En dimension plus grande la situation est radicalement différente: pour tout $\varepsilon > 0$ on a une sphère de Berger (voir [3, p. 70]) vérifiant $K \leq 1$ et en tout point x $\text{Ray Inj}_x(V) \leq \varepsilon$.

1-3. Notre résultat est à rapprocher du théorème suivant [6]: tout domaine V du plan euclidien bordé par une courbe de Jordan lisse à courbure géodésique $k_g(\partial V) \leq 1$ contient un disque de rayon 1. Nous en donnons une généralisation en 3-3.

De même, pour $V \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, si ∂V est une hypersurface fermée dont tous les rayons de courbure principaux sont ≥ 1 , alors V contient une boule de rayon $2/\sqrt{3} - 1$, [9].

Citons d'autres conditions assurant l'existence de points où le rayon d'injectivité est grand:

- V est simplement connexe, $K \leq 0$; alors $\text{Ray Inj}_x(V) = \infty$ pour tout $x \in V$.

- V est compacte simplement connexe, de dimension paire (resp.: de dimension impaire ≥ 3) et $0 < K \leq 1$ (resp.: $1/4 \leq K \leq 1$); alors $\text{Ray Inj}_x(V) \geq \pi$ pour tout $x \in V$ ([3, pp. 98-100] et [8]).

- V est simplement connexe de dimension 3 et $0 < k < K \leq 1$; alors $\text{Ray Inj}_x(V) > 6 \exp(-3/k)$ pour tout $x \in V$ ([1] et [11]).

$-V$ est compacte de dimension n et $-1 \leq K < 0$; alors il existe un point p de V tel que $\text{Ray Inj}_p(V) \geq (1/4)^{n+3}$ ([2, p. 28] et généralisations dans [5, pp. 75 et 135]).

1-4. La preuve de notre théorème s'appuie sur [10], où il est montré que dans une surface V homéomorphe à S^2 le cut-locus de tout point x contient un point x' conjugué à x (dans [10] V est analytique; voir [12, p. 38] pour une version C^∞). Si de plus $K(V) \leq 1$, alors $\text{dist}(x, x') \geq \pi$ (en particulier $\text{Diamètre}(V) \geq \pi$). Nous utilisons ce fait pour des points convenablement choisis. Enfin on avait déjà dans [4, App. 1] une propriété intermédiaire: il existe deux points p, q de V vérifiant $\text{dist}(p, q) = \pi$ et $\text{Ray Inj}_p(V) + \text{Ray Inj}_q(V) \geq \pi$.

L'auteur remercie le Professeur M. Gromov pour ses suggestions durant la préparation de cet article.

2. Énoncé et démonstration des résultats

2-1. Quand $\partial V \neq \emptyset$, $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \alpha$ signifie que l'exponentielle en p est définie dans la boule ouverte de rayon α et induit un difféomorphisme de $B(0, \alpha)$ sur $\text{Exp}_p(B(0, \alpha)) \subset V$. dist ($= \text{dist}^V$) est la distance de longueur de V (voir [5]) et on appelle rayon intérieur de V la quantité: $\text{RInt}(V) = \text{Sup}_{\xi \in V} \text{dist}(\xi, \partial V)$.

2-2. Sur un espace métrique compact X on définit la "fonction périphérique"

$$\text{Per}_p(X) = \text{Diamètre}(X) - \text{Max}_{\xi \in X} \text{dist}(p, \xi), \quad p \in X,$$

p est périphérique quand $\text{Per}_p(X) = 0$. "Per" est 1-lipschitzienne, vérifie $0 \leq \text{Per}_p(X) \leq \frac{1}{2} \text{Diamètre}(X)$, et pour les points d'une variété riemannienne V $\text{Ray Inj}_p(V) \leq \text{Diamètre}(V) - \text{Per}_p(V)$.

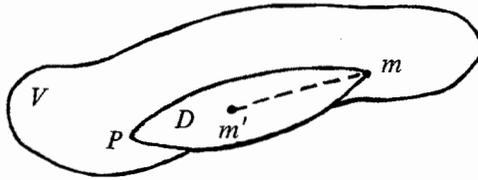
2-3. **Théorème.** Soit V une surface riemannienne C^∞ simplement connexe à courbure $K_x(V) \leq 1$ en tout point x de V , complète si $\partial V = \emptyset$, avec $\text{RInt}(V) \geq \pi$ si $\partial V \neq \emptyset$. Alors il existe un point p de V tel que: $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \pi$. Plus précisément on a pour tout $x \in V$:

(1) $\text{Ray Inj}_x(V) \geq \pi - \text{Per}_x(V)$ si V est homéomorphe à S^2 .

(2) $\text{Ray Inj}_x(V) \geq \text{dist}(x, \partial V) + \text{Min}(0, \pi - \text{RInt}(V))$ si V est homéomorphe à D^2 , et sans hypothèse sur $\text{RInt}(V)$.

Remarque. (1) est stricte dès que $\text{Per}_x(V) > 0$. (2) est une égalité si $\text{RInt}(V) \leq \pi$ et est stricte si $\text{RInt}(V) > \pi$ et $\text{dist}(x, \partial V) < \text{RInt}(V)$.

2-4. **Lemme.** Considérons dans une surface C^∞ simplement connexe V , complète si $\partial V = \emptyset$, un disque D dont le bord est formé de deux géodésiques minimales reliant deux points p et m . Alors il existe un point m' et D conjugué à m le long d'une géodésique de D minimale.

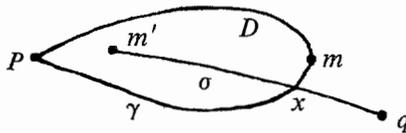


Preuve. Quitte à prolonger la métrique de V en une métrique complète sur \mathbf{R}^2 , et qui induit sur V une distance plus petite que dist^V , on peut supposer $\partial V = \emptyset$.

On note A l'ensemble des points de coupure des géodésiques issues de m et qui rentrent dans D . D'après [10, p. 387] $A \subset \overset{\circ}{D} \cup \{p\}$. A contient le point m' cherché: autrement A serait l'image d'une immersion topologique $\varphi: [0, 1] \rightarrow D$ avec $\varphi(0) = \varphi(1)$ et on montrerait en imitant [12, p. 38] que A contient une courbe de Jordan C ; C borde un disque dans D , donc $V - \text{CutLoc}(m)$ ne serait pas connexe.

Démonstration du théorème. Nous distinguerons trois cas, selon le type topologique de V (\mathbf{S}^2 , \mathbf{D}^2 ou \mathbf{R}^2).

2-5. V homéomorphe à \mathbf{S}^2 . Considérons p un point de V avec $\text{Ray Inj}_p(V) < \pi$ (quand $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \pi$ il n'y a rien à montrer). Il existe un lacet géodésique γ en p de longueur $2 \cdot \text{Ray Inj}_p(V)$. D'après le Lemme 2-4 $\text{Max}_{\xi \in V} \text{dist}(p, \xi) \geq \pi$. Soit q un point où ce maximum est atteint. Nécessairement $q \notin \gamma$; soit D le disque bordé par γ qui ne contient pas q . Le Lemme 2-4 et l'hypothèse $K \leq 1$ nous donnent un point $m' \in \overset{\circ}{D}$ avec $\text{dist}(m, m') \geq \pi$, m étant le milieu de γ . Notons enfin σ une géodésique minimale de m' à q et x un point de $\sigma \cap \gamma$.



Alors $\text{dist}(m', q) \geq \pi - \text{dist}(m, x) + \text{dist}(p, q) - \text{dist}(p, x)$, i.e., $\text{dist}(m', q) \geq \pi - \text{Ray Inj}_p(V) + \text{dist}(p, q)$, d'où $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \pi - \text{Per}_p(V)$.

2-6. V homéomorphe à \mathbf{D}^2 . V est un espace de longueur connexe (voir [5]). En particulier pour tout couple de points (a, b) de V il existe une courbe c reliant a et b de longueur $\text{dist}(a, b)$; de plus c est une géodésique (au sens riemannien) au voisinage de ses points qui ne sont pas dans ∂V . Considérons p un point quelconque de V et $\gamma: [0, 2L] \rightarrow V$ un lacet géodésique (de vitesse 1) en p tel que $\gamma|_{[0, L]}$ et $\gamma|_{[L, 2L]}$ soient minimales. En raisonnant comme en 2-5 on trouve un point m' de V avec $\text{dist}(m', \partial V) \geq \pi - L + \text{dist}(p, \partial V)$, d'où

$$(*) \quad L \geq \text{dist}(p, \partial V) + \pi - \text{RInt}(V).$$

Supposons maintenant que $\text{Ray Inj}_p(V) < \text{Min}(\text{dist}(p, \partial V), \pi)$. Comme $B(p, \text{dist}(p, \partial V)) \cap \partial V = \emptyset$ il existe un lacet géodésique en p dont la longueur $2 \cdot \text{Ray Inj}_p(V) = 2L$ doit satisfaire l'inégalité (*). Cela montre l'assertion (2) du Théorème 2-3.

2-7. **Remarque.** Un disque Δ dans une surface complète V porte deux distances: dist^Δ et $\text{dist}^V|_\Delta$. Or $\text{dist}^V(x, \partial\Delta) = \text{dist}^\Delta(x, \partial\Delta)$ pour tout $x \in \Delta$. Donc dès que $\text{Max}_{\xi \in \Delta} K_\xi(V) \leq 1$ et $\text{Max}_{\xi \in \Delta} \text{dist}^V(\xi, \partial\Delta) \geq \pi$ le résultat 2-6 fournit un point de Δ où le rayon d'injectivité (dans V) est plus grand que π .

2-8. V homéomorphe à \mathbf{R}^2 . Pour tout compact $C \subset V$ il existe un disque D à bord lisse contenant C : en effet, V est difféomorphe au plan euclidien pour lequel cette propriété est claire. Prenant pour C n'importe quelle boule fermée de rayon π on a $\text{Max}_{\xi \in D} \text{dist}^V(\xi, \partial D) \geq \pi$ et la Remarque 2-7 permet de conclure. Ce qui achève la démonstration du Théorème.

2-9. Remarque sur la géométrie de V quand $\partial V = \emptyset$. Il existe un 2π -réseau (voir [5]) de V dont les points p vérifient:

- ou bien $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \pi$,
- ou bien $\text{Ray Inj}_p(V) < \pi$ et il existe un lacet γ en p tel que pour tout disque D bordé par γ $\text{Max}_{\xi \in D} \text{dist}(p, \xi) \geq 2\pi$; un tel disque contient un point p' avec $\text{Ray Inj}_{p'}(V) \geq \pi$.

Preuve. Soit $x \in V$, $C = \bar{B}(x, 2\pi)$. Tout point $p \in C$ à distance maximale de ∂C convient; sinon on aurait γ lacet en p bordant un disque $D \subset B(p, 2\pi) \subset C$, et la construction de 2-5 donnerait un $m' \in D$ avec $\text{dist}(m', \partial C) > \text{dist}(p, \partial C)$ absurde. Dans le second cas, l'existence de p' s'établit par un argument analogue.

3. Conséquences

3-1. **Corollaire 1.** Soit V une surface homéomorphe à \mathbf{S}^2 et $K(V) \leq 1$. Alors:

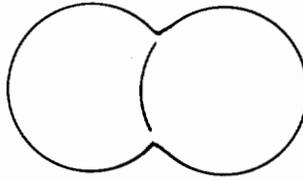
- (i) $\text{Ray Inj}_x(V) \geq 2\pi - \text{Diam}(V)$ pour tout $x \in V$.
- (ii) Si $\pi \leq \text{Diam}(V) \leq 2\pi$ alors $\text{Aire}(V) \geq 4\pi(1 - \cos(\frac{1}{2} \cdot \text{Diam}(V)))$; si $2\pi \leq \text{Diam}(V)$ alors $\text{Aire}(V) \geq 8\pi$.

Preuve. (i) D'après le Lemme 2-4 $\text{Max}_{\xi \in V} \text{dist}(p, \xi) \leq \pi$ pour tout $p \in V$, donc

$$\text{Per}_p(V) \leq \text{Diam}(V) - \pi.$$

(ii) Posons $r = \text{Min}(\pi, \frac{1}{2} \cdot \text{Diam}(V))$. Pour p et q avec $\text{dist}(p, q) = \text{Diam}(V)$ les boules ouvertes $B(p, r)$ et $B(q, r)$ sont plongées et disjointes.

L'Inégalité (i) est stricte dès que $\text{Diam}(V) > \pi$. L'inégalité (ii) est optimale: on peut recoller en une surface lisse à $K \leq 1$ deux disques de rayon $\geq \pi/2$ de $(\mathbf{S}^2, \text{can})$.



3-2. **Corollaire 2.** *Pour toute métrique à courbure $K \leq 1$ sur le plan projectif réel \mathbf{RP}^2 il existe un point p tel que $\text{Ray Inj}_p \geq \pi/2$.*

En effet si $\varphi: \tilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement double riemannien alors $\text{Ray Inj}_{\varphi(\tilde{x})}(M) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{Ray Inj}_{\tilde{x}}(\tilde{M})$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$.

3-3. Considérons V un disque riemannien orienté. Si n est la normale rentrante, on oriente ∂V par un vecteur unitaire u tel que (u, n) soit directe et on pose $K_g(\partial V) = \langle \nabla_u u, n \rangle$.

Corollaire 3. *Soit V un disque riemannien avec $K(V) \leq \Lambda^2$ ($\Lambda \geq 0$) et pour un certain réel k , $K_g(\partial V) \leq k$. Alors si $\Lambda = 0$ on a nécessairement $k > 0$; dans tous les cas il existe un point p de V tel que:*

$$(3-3) \quad \text{Ray Inj}_p(V) \geq 1/\Lambda \cdot \text{Arc cotg}(k/\Lambda) \quad (\text{lire } 1/k \text{ si } \Lambda = 0).$$

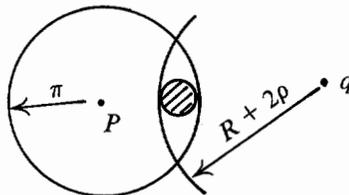
Il suffit de voir que $\text{RInt}(V) \geq 1/\Lambda \cdot \text{Arc cotg}(k/\Lambda)$. Or le cut-locus de ∂V dans le fibré normal N à ∂V contient un point v singulier pour $\text{Exp}_{|N}$: sinon $\text{CutLoc}(\partial V) \subset V$ serait l'image d'un cercle par une immersion topologique et $V - \text{CutLoc}(\partial V)$ ne serait pas connexe (noter l'analogie avec le Lemmi 2-4). Mais d'après [5, p. 111] $\|v\| \geq 1/\Lambda \cdot \text{Arc cotg}(k/\Lambda)$ si $\Lambda > 0$, $k > 0$ et $\|v\| \geq 1/k$ si $\Lambda = 0$. Donc $\text{dist}(\text{Exp}_{|N}(v), \partial V) \geq 1/\Lambda \cdot \text{Arc cotg}(k/\Lambda)$.

Pour les disques $V = \bar{B}(p, r)$ ($r < \pi/\Lambda$) dans la surface à courbure constante Λ^2 , (3-3) est une égalité.

3-4. **Corollaire 4.** $\text{Min Vol}(\mathbf{R}^2) > 4\pi + 0,484$.

Il s'agit de minorer l'aire d'une métrique complète sur \mathbf{R}^2 avec $|K| \leq 1$ (voir [4, App. 1]). Soit $p \in V$ un point où $\text{Ray Inj}_p(V) \geq \pi$, $q \in V$ avec $R = \text{dist}(q, B(p, \pi)) > 0$, et ρ un réel $0 < \rho \leq \pi/2$. Pour tout point x de $B(p, \pi)$ on a $\text{Ray Inj}_x(V) \geq \pi - \text{dist}(p, x)$: raisonner par l'absurde en appliquant le lemme d'homotopie de Klingenberg [7, p. 205] (ou bien utiliser de Théorème 2-3). Donc $B(q, R + 2\rho) \cap B(p, \pi)$ contient une boule plongée de rayon ρ disjointe de $B(q, R)$, et

$$(a) \quad \text{Aire } B(q, R + 2\rho) \geq \text{Aire } B(q, R) + 2\pi(1 - \cos \rho).$$



Par ailleurs, puisque $K \geq -1$, on a

$$(b) \quad \frac{\text{Aire } B(q, R)}{\text{Aire } B(q, R + 2\rho)} \geq \frac{\text{ch}(R) - 1}{\text{ch}(R + 2\rho) - 1}.$$

De (a) et (b), et comme R peut être arbitrairement grand on déduit l'inégalité:

$$\text{Aire}(V) \geq 4\pi + 2\pi \frac{1 - \cos \rho}{\exp(2\rho) - 1}.$$

Enfin on choisit $\rho = 0,73$.

Rajouté sur épreuves. Le Professeur M. Gromov a récemment informé l'auteur qu'un résultat analogue à 1.1 se trouve dans l'article de Y. Burago, *The radius of injectivity on the surfaces whose curvature is bounded above*, Ukrain Geometr. Sb. **21** (1978), 10–14, en russe.

Bibliographie

- [1] Y. Burago & V. Toponogov, *On three-dimensional riemannian spaces with curvature bounded from above*, Math. Notes **13** (1973) 526–530.
- [2] P. Buser & H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81, Soc. Math. France, 1981.
- [3] J. Cheeger & D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [4] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 56 (1982) 5–99.
- [5] M. Gromov, J. Lafontaine & P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cédic/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [6] V. Ionin & G. Pestov, *On the largest possible circle imbedded in a given closed curve*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **127** (1959) 1170–1172.
- [7] W. Klingenberg, *Riemannian geometry*, De Gruyter Studies in Mathematics, No. 1, De Gruyter, Berlin and New York, 1982.
- [8] W. Klingenberg & T. Sakai, *Injectivity radius estimate for 1/4-pinched manifolds*, Arch. Math. **34** (1980) 371–376.
- [9] V. Lagunov, *On the largest sphere contained in a closed surface*. I, II, Sibirsk. Mat. Z. **1** (1960) 205–232, **2** (1961) 874–883.
- [10] S. Myers, *Connexion between differential geometry and topology*, Duke Math. J. **1** (1935) 376–391.
- [11] T. Sakai, *On a theorem of Burago-Toponogov*, preprint.
- [12] A. Weinstein, *The cut locus and conjugate locus of a riemannian manifold*, Ann. of Math. **87** (1968) 29–41.